4.5 VIOLATION DES INEGALITES DE BELL & LOGIQUE QUANTIQUE

A. Violation des inégalités de Bell

RESUME[1] : On sait depuis, Einstein & Al. 1935, que certains principes de base sont incompatibles avec les prédictions de la mécanique quantique.
Depuis Bell 1964, on a pu mettre en évidence et réaliser des expériences précises dont les résultats sont incompatibles avec ces mêmes principes.

Principes de Base

1) *Principe de réalité d'Einstein* : si, sans perturber un système, on peut prédire avec certitude la valeur d'une quantité que l'on va mesurer, alors il y a un *élément de réalité* (indépendant de "moi" et de "mes" décisions) associé à cette quantité.

2) *Principe de séparabilité* : une influence ne peut pas se propager avec une vitesse supérieure à la vitesse de la lumière.

Remarque : la violation du principe de séparabilité ne contredit la relativité restreinte qu'à condition d'adopter sans restriction le principe de réalité d'Einstein.

3) *Principe d'induction* : si on effectue un très grand nombre de fois la même expérience dans les mêmes conditions (définies macroscopiquement), et qu'on obtient toujours le même résultat, alors on obtiendra encore le même résultat si on réitère l'expérience. (De nettes présomptions sont au moins justifiées).

Ex : celui qui pense que le soleil se lèvera demain matin utilise le principe d'induction.

4) *Principe de contrafactualité* : une qualité peut être attribuée contrafactuellement, c-à-d. en se référant au résultat certain d'une expérience NON réalisée.
Cela permet par exemple, d'affirmer que le morceau de fer que je tiens en main est magnétique simplement parce que je suis sûr qu'il attir**erait** de la limaille de fer **si** je lui en présentais.

Remarque : le principe de contrafactualité permet de remplacer dans le principe de réalité, l'expression : "que l'on va mesurer" par "que l'on mesurerait".

Démonstration des inégalités de Bell (sous une forme due à d'Espagnat)

Si A, B et C sont trois ensembles finis, alors on a :

$$A \cap B \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap \neg C)$$

avec $\neg C$ représentant le complémentaire de C.
En effet, si $x \in A \cap B$ alors :
si $x \in C$ on a $x \in A \cap C$ et donc x appartient au deuxième membre;
si $x \notin C$ on a $x \in \neg C$ et $x \in B \cap \neg C$ et donc x appartient au deuxième membre également.

Désignons le nombre d'éléments de $A \cap B$ par $N_{AB}(++)$
En réalisant que $A \cap C$ et $B \cap \neg C$ sont disjoints, on a, avec des notations évidentes :

$$N_{AB}(++) =< N_{AC}(++) + N_{BC}(+-)$$

[1] Compte rendu d'un exposé effectué en 1980 à l'Université Libre de Bruxelles au service de cosmologie de M. Brout et M. Englert. J'ai apporté quelques modifications mineures depuis qu'Aspect a réalisé son expérience à Paris (Aspect 1976, Aspect & Al. 1981, 1982).

Imaginons à présent un ensemble dont les éléments sont susceptibles de réagir positivement, ou négativement, à trois types de tests dichotomiques donnés A, B et C. Je dirai, avec abus de langage, que l'élément x a la propriété A (resp. $\neg$ A) si je peux prédire avec certitude que x réagirait positivement (resp. négativement) si je réalisais le test A.

Prenons dans notre ensemble trois échantillons possédant le même nombre d'éléments. Alors, avec une probabilité qui se rapproche de 1 lorsque la taille des échantillons augmente, le nombre d'éléments $n_{AB}(++)$ de l'échantillon 1 est inférieur ou égal au nombre d'éléments $n_{AC}(++)$ de l'échantillon 2 ajouté au nombre d'éléments $n_{BC}(+-)$ de l'échantillon 3 :

$$n_{AB}(++) \leq n_{AC}(++) + n_{BC}(+-)$$

Cette relation est connue sous le nom d'inégalité de Bell. Cette présentation est due à d'Espagnat.

Remarque : le principe de séparabilité n'a pas été utilisé jusqu'ici.

Violations expérimentales des inégalités de Bell :

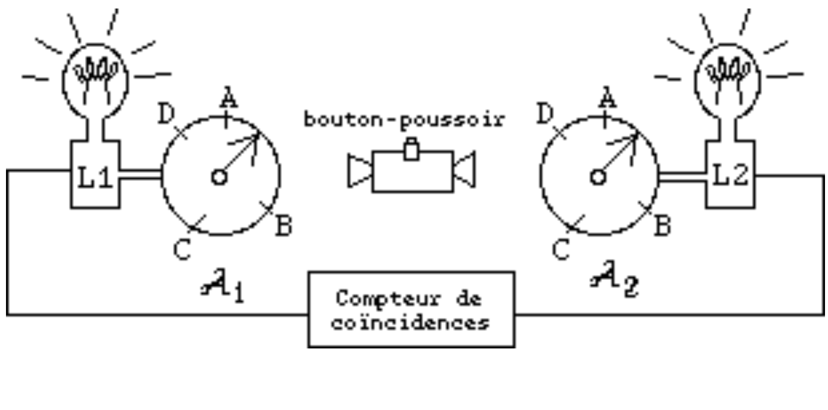
Il est facile de montrer qu'il existe des prédictions de la mécanique quantique violant l'inégalité de Bell. On peut même avancer que la contradiction réside dans les principes de réalité et de contrafactualité. C'est la raison pour laquelle certains physiciens se sont proposés de modifier la mécanique quantique. Les “nouvelles” théories ne peuvent évidemment admettre les mêmes prédictions que la mécanique quantique (puisque ce sont les prédictions qui violent l'inégalité). Des tests expérimentaux ont donc été réalisés. Deux faits sont remarquables :

1) Ces expériences, indépendamment de toutes interprétations, violent l'inégalité de Bell. Un de nos principes au moins devra être abandonné.

2) L'inégalité est violée dans les rapports prédits par le formalisme quantique. Ceci suggère à nouveau une faiblesse du principe de réalité. Compte tenu du succès, sur le plan prédictif, de la relativité restreinte, il est déjà difficile de nier le principe de séparabilité. Quant au principe d'induction, le plus difficile à justifier philosophiquement (Hume), il est à la base même de toute démarche scientifique sur base empirique.

Je vais décrire une expérience type du genre de celles qui violent l'inégalité en prenant soin de n'utiliser aucun terme de la physique (contemporaine ?). On ne sait ni ce qu'est un photon, ni ce qu'est un polariseur, encore moins ce qu'est une fonction d'onde !

Je considère le dispositif suivant :



Il est constitué d'un dispositif, pourvu d'un bouton-poussoir, situé symétriquement entre deux appareils A_1 et A_2 reliés chacun à une lampe L1 et L2.

A_1 et A_2 sont identiques et possèdent respectivement au moins quatre degrés de liberté correspondant à quatre états possibles : A, B, C, D.

Les deux lampes sont à leur tour reliées à un compteur de coïncidences qui compte le nombre de fois où les deux lampes se sont allumées simultanément.

Voici les faits de base :

1) Lorsque les appareils A_1 et A_2 sont chacun dans l'état "D", chaque fois que j'appuie sur le bouton, les deux lampes s'allument toujours.

2) Chaque fois que je presse le bouton, et que A_1 et A_2 sont dans le même état, ou bien L1 et L2 s'allument ensemble, ou bien ni L1 ni L2 ne s'allument. Il y a *toujours* coïncidence.

Avec les principe de séparabilité et de réalité, je dois conclure qu'à chaque pression "quelque chose" quitte la région du bouton-poussoir pour l'appareil A_1 (de même pour l'appareil A_2). Ce sont ces "quelque choses" qui jouent le rôle d'éléments de réalité de la démonstration de l'inégalité. Ce sont ces "éléments de réalité" qui sont comptés.

Si je sais avec certitude que la lampe L1 (resp L2) s'allumerait si l'appareil A_1 (resp A_2) était dans un état A_i (où A_i est un des quatre degrés de liberté), je dirai, avec un abus de langage évident, que les éléments correspondants ont la propriété A_i (j'utilise les principes de réalité et de contrafactualité).

En particulier, puisque je peux prédire avec certitude que si A_1 et A_2 sont dans l'état D, à chaque pression les deux lampes s'allument, on aura deviné que "D" est la simple propriété "d'existence" (indépendante) de l'élément. Avec le principe d'induction, sur base du premier fait, tous les éléments créés, après qu'on ait poussé sur le bouton, ont cette propriété D.

De même, en utilisant encore le principe d'induction sur base du second fait, je peux affirmer qu'après avoir poussé sur le bouton-poussoir, l'élément de "gauche" possède les mêmes propriétés (parmi A, B, C, D) que l'élément de "droite".

Ainsi pour chaque élément, je peux mesurer deux propriétés intrinsèques : il suffit de placer A_1 dans l'état A et A_2 dans l'état B (par exemple), si L1 s'allume, L2 s'allumerait avec certitude si A_2 était dans l'état A, donc l'élément qui va vers A_2 possède la propriété A, et donc l'autre élément aussi. De même, si L2 s'allume, les deux éléments ont la propriété B.

Comme après chaque pression les éléments possèdent toujours la propriété D, si une lampe ne s'allume pas lorsque l'appareil est dans l'état A (resp. B ou C) l'élément correspondant possède nécessairement la propriété $\neg$ A (resp. $\neg$ B ou $\neg$ C).

Violations des inégalités de Bell

L'expérience consiste à pousser N fois (N grand) sur le bouton, avec

- A_1 et A_2 dans l'état A et B respectivement, on compte le nombre de fois où les deux lampes s'allument : $n_{AB}(++)$;

- A_1 et A_2 dans l'état A et C respectivement, on compte le nombre de fois où les deux lampes s'allument : $n_{AC}(++)$;

- A_1 et A_2 dans l'état B et C respectivement, on compte le nombre de fois où L1 s'allume avec L2 qui ne s'allume pas : $n_{BC}(+-)$.

Paradoxalement on trouve : $n_{AB}(++) > n_{AC}(++) + n_{BC}(+-)$

APPENDICE :

Il se pourrait que les éléments de gauche et de droite n'aient les mêmes propriétés que dans le cas restreint où A_1 et A_2 sont dans le même état.

On devrait alors admettre que ces deux appareils influent sur les conditions initiales en informant les éléments, non encore envoyés, de leurs positions. Un principe supplémentaire peut être ajouté pour interdire ce genre d'influence. Pour éviter l'usage d'un tel principe on peut faire en sorte que les états de A_1 et de A_2 soient choisis un temps L/c-ε après avoir appuyé sur le bouton-poussoir, (L représentant la distance entre le bouton et un appareil, c représentant la vitesse de la lumière). Une expérience de ce type a été proposée par Aspect en 1976 et réalisée depuis avec succès.

Remarque : comme les cônes de lumière de chaque particule intervenant dans cette expérience, y compris les atomes de mon propre cerveau, lequel a choisi les paramètres A, B, C....., ont probablement une intersection non vide, on peut donc encore imaginer une interprétation causale et réaliste. Mais une telle conspiration cosmique des éléments de la nature interdirait d'inférer quoi que ce soit d'universel à partir d'observations de la nature.

B Logique quantique

La relation booléenne

$$A\cap B \sqsubseteq (A\cap C)\cup(B\cap -C)$$

peut être considérée comme une interprétation algébrique de la tautologie classique A&B -> (A&C)v(B&¬C), ou plus exactement de la règle classiquement correcte A&B => (A&C)v(B&¬C).

Existe-t-il une axiomatisation de la logique quantique QL, c-à-d une théorie axiomatisant les propositions quantiques ?

Une telle logique a été proposée par Birkhoff et Von Neumann en 1936.

Comme pour la logique intuitioniste, on peut la voir comme un affaiblissement de la logique classique. Selon Dalla Chiara 1976, on obtient une axiomatisation Hilbertienne de la logique quantique à partir d'une présentation *à-la-Kleene* du calcul propositionnel classique (voir 1.2), en affaiblissant l'axiome classique (le principe de l'*a fortiori*) :

p->(q->p)

Ce schéma d'axiome n'est accepté en logique quantique que pour des propositions *implicationnelles* à la place de p. Les propositions implicationnelles ont la forme A->B, ou une combinaison booléenne de telles formes, avec A et B formules quelconques.

Cette présentation Hilbertienne donne l'impression qu'il existe une implication matérielle en QL, mais le théorème de déduction de Herbrand n'est pas valable, et l'usage de l'implication de Dalla Chiara est assez "pathologique". Il s'agit plutôt d'une déduction déguisée. Il est nécessaire de rajouter comme règle d'inférence, en plus du modus ponens (et des éventuelles règles habituelles pour le traitement des quantificateurs), une règle de l'a posteriori :

p => (q->p)

La coutume est plutôt de dire que la logique quantique n'a pas d'implication et de présenter alors la logique dans une présentation à la Gentzen (rien qu'avec des règles d'inférence) :

A => A

A&B => A
A&B => B
A => ¬ ¬ A
¬ ¬ A => A
A & ¬ A => B
Si A => B et B => C alors A => C
Si A => B et A => C alors A => B & C
Si A => B alors ¬ B => ¬ A

Il s'agit ici de version faible de la logique quantique. En général, on rajoute, pour avoir la logique quantique proprement dite, un axiome d'orthomodularité, par exemple le schéma d'axiomes

(p->q)->(q->(pv(¬ p&q))

pour le système Hilbertien de Dalla Chiara, ou la règle

A&(Av(¬ A&B)) => B

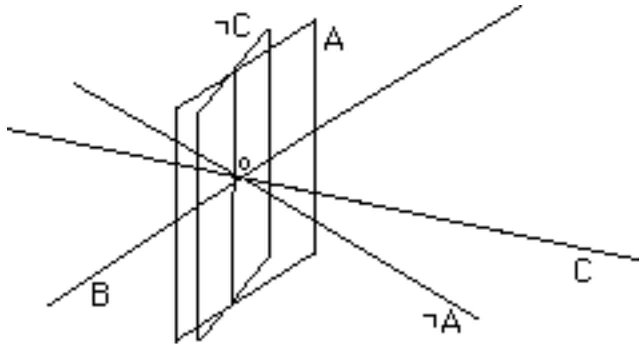
dans la présentation à la Gentzen (voir Goldblatt 1974). AvB est, par définition, une abréviation de ¬ (¬ A & ¬ B).

La logique quantique est née des considérations algébriques et est présentée souvent exclusivement par sa sémantique algébrique. Je renvoie à la littérature pour les théorèmes de complétude correspondant.

En gros, la valuation d'une proposition quantique est donnée par un sous-espace d'un espace vectoriel muni d'une notion d'orthogonalité.

Le & est capturé par l'intersection (l'intersection de sous-espaces est un sous-espace); le "v" est capturé par la somme des sous-espaces (= le plus petit sous-espace engendré); la négation " ¬ " est capturée par la relation d'orthogonalité vectorielle (étendue aux sous-espaces : un espace est orthogonal à un autre si tous les vecteurs de cet espace sont orthogonaux à tous les vecteurs de l'autre espace). De plus, comme il est usuel dans les sémantiques algébriques, la déduction "=>" est capturée par la relation "être sous-espace".

L'espace euclidien R^3 suffit ici pour réfuter la relation "booléenne" correspondant à l'inégalité de Bell. B est un sous-espace de A, et A∩B = B. Il suffit alors de prendre C de telle façon qu'il soit unidimensionnel et non orthogonal à A. Danc ce cas (A∩C) et (B∩ ¬ C) se réduisent au sous-espace vectoriel nul comme on le voit sur la figure suivante :



La somme des deux vectoriels est le vectoriel nul, et A∩B = B n'est pas un sous-espace du vectoriel nul.

De la même façon on peut vérifier que : a & (b V c) <≠> (a & b) V (a & c)

Bibliographie locale

ASPECT A., **1976**, *Proposed Experiment to Test the Non-Separability of Quantum Mechanics*, Physical review D 14, pp. 1944-1951.

ASPECT A., **GRANGIER** P., **ROGER** G., **1981**, *Experimental tests of realistic local theories via Bell's theorem*, Physical Review Letters 47, pp. 460-463.

ASPECT A., **DALIBARD** J., **ROGER** G., **1982**, *Experimental Test of Bell's Inequalities using time-varying analysers*, Physical Review Letters 49, pp. 1804-1807.

BIRKHOFF G. & **VON NEUMANN** J., **1936**, *The Logic of Quantum Mechanics*, Annals of Mathematics, Vol. 37, n° 4, pp. 823-843.

BELL J.S., **1964**, *On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox*, Physics, 1, pp. 195-200.

CLAUSER J. F., **HORN** M. A., **SHIMONY** A., **HOLT** R. A., **1969**, *Proposed Experiment to Test Hidden Variable Theories*, Physical Review Letters 23, pp. 880-883.

DALLA CHIARA M. L., **1976**, *A General Approach to non Distributive Logics*, Studia Logica XXXV, pp. 139-162.

DALLA CHIARA M. L., **1986**, *Quantum Logic*, in Handbook of Philosophical Logic, Vol III, Gabbay D. and Guenthner F. (eds.), D. Reidel Publishing Company, pp. 427-469, Dordrecht.

D'ESPAGNAT B., **1979**, A la recherche du réel, Gauthier-Villars, Paris.

EINSTEIN A., **PODOLSKI** B, and **ROSEN** N, **1935**, *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered complete ?*, Physical Review, Vol 47, pp. 770-780, may 15.

GOLDBLATT R. I., **1974**, *Semantic Analysis of Orthologic*, Journal of Philosophical Logic, 3, pp. 19-35.

MARCHAL B., **1978**, *Introductions au théorème de Bell*, preprint, ULB, Laboratoire de Cosmologie, Plaine des Manoeuvres, Bâtiment NO, Bruxelles.